Université de Haute-Alsace
2022/2023
Outils Géométrie CPB 1 ENSCMU - PC renfort
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 1 : Déterminants

La notion de déterminant est une notion essentielle en algèbre linéaire et en géométrie. C'est un nombre que l'on associe à une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On verra qu'il permet de calculer le volume du parallélépipède engendré par ces vecteurs, et qu'il permet aussi de déterminer si la matrice carrée formée par ces vecteurs est inversible ou non.

1 Définition du déterminant par récurrence

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Rappelons que $M_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, pour $n \geq 1$. On commence par définir le déterminant en petites dimensions, puis on verra une définition générale.

Définition 1

- Soit $a \in \mathbb{K}$ (vu comme une matrice 1×1). Alors $\det(a) = a$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$. Alors $\det(B) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$.

Pour les matrices plus grandes, on définit le déterminant par récurrence avec la définition générale ci-dessous :

Définition 2

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. On définit par récurrence une application $\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$:
- si $n = 1$, $A = a \in \mathbb{K}$: on pose alors $\det(A) = a$;
- si $n > 1$, notons $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en retirant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. Alors

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) + ... + (-1)^{k+1}a_{1k}\det(A_{1k}) + ...(-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n}).$$

Exemples :

1. Matrices 2×2 : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad + (-1)^{(1+2)}bc = ad - bc.$$

On retrouve bien ce qu'on avait vu précédemment.

2. Matrices 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (1+5) + 2 \times (2+1) + 3 \times (10-1) = 39.$$

3. Matrices 4×4 :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (...) + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-2) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \left(1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + 1 \times \left(1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ &= 0 - 1 + 0 - 1 + 0 \\ &= -2.\end{aligned}$$

Remarque. C'est une méthode de calcul longue : pour le déterminant d'une matrice 6×6, on doit calculer 6 déterminants d'ordre 5, donc 30 d'ordre 4, donc 120 d'ordre 3, donc 360 d'ordre 2, donc au final on se retrouve avec 720 calculs ! !

Quelques déterminants remarquables

- Matrice diagonale : si

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \in M_n(\mathbb{K}),$$

on a alors en utilisant la définition :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

- Matrice triangulaire inférieure : si

$$T = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & \vdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \in M_n(\mathbb{K}),$$

on retrouve aussi en utilisant la définition que

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Remarque. On verra que si $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A) = \det({}^tA)$. Ainsi, on peut développer selon la première colonne au lieu de la première ligne et on peut remplacer "inférieure" par "supérieure" dans le calcul ci-dessus.

2 Propriétés du déterminant

Théorème 3 (Multilinéarité)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le déterminant est une application multilinéaire des colonnes de A, c'est à dire :

1. Si A' est obtenue en multipliant une colonne de A par $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(A') = \lambda \det(A)$.
2. Si on note les colonnes de A par c_i, $1 \leq i \leq n$, et si v est un vecteur-colonne de taille n, alors

$$\begin{aligned}\det(c_1, ..., c_{i-1}, v + c_i, c_{i+1}, ..., c_n) &= \det(c_1, ..., c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, ..., c_n) \\ &\quad + \det(c_1, ..., c_{i-1}, v, c_{i+1}, ..., c_n)\end{aligned}$$

Remarque. Le point 1 du théorème entraîne que pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration. Notons c_i les colonnes de A, $1 \leq i \leq n$. On a donc $A = (c_1, c_2, ..., c_n)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, posons $A' = (c_1, c_2, ...\lambda c_i, ..., c_n)$. Prouvons l'énoncé par récurrence sur la dimension de la matrice.

$n = 1$: il n'y a rien à montrer.

$n = 2$: c'est une simple vérification :

$$\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

On vérifie de même sur la deuxième colonne.

"$(n-1) \to n$" : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Par définition, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}), \quad A_{1,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K}).$$

Or par hypothèse de récurrence, l'énoncé est vrai pour $\det(A_{1,j})$, donc il est aussi vrai pour $\det(A)$, qui n'est qu'une somme de tels termes. Précisément :

$$\begin{aligned}\det(A') &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det(A'_{1,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \lambda \det(A_{1,j}) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}) \\ &= \lambda \det(A).\end{aligned}$$

Le point 2. se montre de la même manière. □

Théorème 4 (Alternance)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Si A'' est obtenue en échangeant deux colonnes de A, alors $\det(A'') = -\det(A)$.
2. Si A a deux colonnes égales, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration.

2. Toujours par récurrence sur la dimension de la matrice. Pour $n = 1$ et $n = 2$, les calculs sont de simples vérifications.
   Pour l'hérédité : supposons que deux colonnes consécutives de $A \in M_n(\mathbb{K})$ sont égales, par exemple supposons $c_k = c_{k+1}$. Si $j \neq k$ et $j \neq k+1$, alors par hypothèse de récurrence on a $\det(A_1, j) = 0$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}) \\ &= (-1)^{k+1} a_{1,k} \det(A_{1,k}) + (-1)^{k+2} a_{1,k+1} \det(A_{1,k+1}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Puis, on montre qu'en échangeant deux colonnes adjacentes, le déterminant change de signe :

$$\begin{aligned}0 &= \det(c_1, c_2, ..., c_j + c_{j+1}, c_j + c_{j+1}, ..., c_n) \\ &= \det(c_1, c_2, ..., c_j, c_j, ..., c_n) + \det(c_1, c_2, ..., c_j, c_{j+1}, ..., c_n) \qquad (*) \\ &+ \det(c_1, c_2, ..., c_{j+1}, c_j, ..., c_n) + \det(c_1, c_2, ..., c_{j+1}, c_{j+1}, ..., c_n).\end{aligned}$$

   On peut ainsi échanger successivement deux colonnes pour les rendre adjacentes, ce qui change le signe à chaque étape. Mais quand deux colonnes égales sont adjacentes, le déterminant est nul, donc changer le signe n'a pas d'incidence ! On déduit ainsi le point 2 du théorème.

1. La preuve du point 1 est un calcul analogue à (*).

$\square$

Remarque. Une application qui vérifie les théorèmes 3 et 4 est dite multilinéaire alternée : elle est linéaire par rapport à chaque variable et change de signe si on échange deux variables.

Proposition 5

1. $\det(I_n) = 1$.
2. $\det(A) = \det(A^t)$, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Exemple de calcul utilisant ces propriétés :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} &= 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 3(0 - 2 - 2) = -12.\end{aligned}$$

Proposition 6

Si A''' est obtenue en ajoutant à une colonne de A une combinaison linéaire d'autres colonnes de A, alors $\det(A''') = \det(A)$.

Exemple : On a vu exemple précédent que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Mais, en effectuant l'opération $c_2 \leftarrow c_2 + c_3$, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

donc finalement on retrouve bien -12 comme avant.

3 Méthode de calcul par le pivot de Gauss

On a déjà vu un peu sur des exemples comment faire. Voici la méthode :

1. Trouver une ligne ou une colonne avec un maximum de zéros ;
2. Modifier la matrice au moyen d'opérations élémentaires (en effectuant des combinaisons linéaires de lignes ou de colonnes), de manière à ce qu'il n'y ait plus qu'un unique élément non nul sur la ligne ou colonne choisie ;
3. Développer selon cette ligne ou colonne ;
4. Recommencer.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 2 = -2.$$

On voit qu'on arrive au résultat beaucoup plus vite qu'avec la méthode de la définition, voir exemple 3 page 1.

Exemple :

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ =& \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (C_3 \longleftarrow C_3 - C_2) \\ =& 1 \times \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ =& \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (L_2 \longleftarrow L_2 - L_1) \\ =& \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

4 Liens avec l'inverse

Définition 7

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
Le **cofacteur** de l'élément $a_{i,j}$ est $\mathrm{cof}(a_{i,j}) = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$.
La **comatrice** de A, notée $\mathrm{com}(A)$, est définie comme étant la matrice des cofacteurs.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, alors le cofacteur de 1 est 4, celui de 2 est -3, celui de 3 est -2 et celui de 4 est 1. On a donc la comatrice :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 8

Formule importante : $A \cdot (\mathrm{com}(A))^t = \det(A) I_n$.

Conséquence : si $\det(A)$ est non nul, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{com}(A)^t$. On a aussi

$$A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

Exemple :

Avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ci-dessus : on constate que $\det(A) = 4 - 6 = -2$, donc A est inversible et on peut calculer son inverse :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\mathrm{com}(A)^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 9

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Attention !!! En général, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$!!! Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2,$$

alors que

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \det(0) = 0.$$

Corollaire 10

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

En effet, $AA^{-1} = I_n$, donc $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$.

Proposition 11

Soit un système linéaire de n équations à n inconnues mis sous forme matricielle $AX = Y$, avec $A \in M_n(\mathbb{K})$ et X, Y des vecteurs colonnes. Ce système possède une solution unique si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, A est inversible et la solution est donnée par $X = A^{-1}Y$.

5 Interprétation géométrique du déterminant

Le déterminant a une interprétation géométrique très simple en termes de calculs d'aires.

Proposition 12

1. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs. Alors l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme formé par ces deux vecteurs vaut la valeur absolue de leur déterminant :
$$\mathcal{A} = |\det(x, y)| = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right|.$$
2. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ et $z = (z_1, z_2, z_3)$ trois vecteurs. Alors le volume $\mathcal{V}$ du parallélépipède formé par ces trois vecteurs vaut la valeur absolue de leur déterminant :
$$\mathcal{V} = |\det(x, y, z)| = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right|.$$